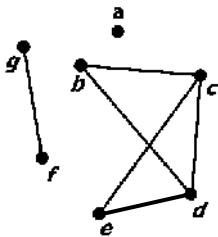


سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	---	------

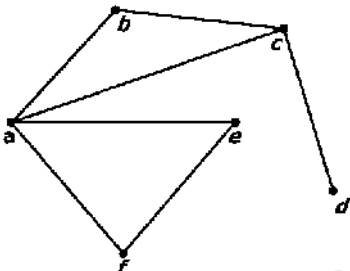
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b+c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. پ) برای مقادیر حقیقی و نا صفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید. الف) حاصل $(m^2, m), m^5$ برابر با است. ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گوئیم a و b هستند. پ) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم. ت) تعداد یال های گراف K_7 برابر است.	۱
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: « برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y+x+1)$ »	۱
۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.	۱/۲۵
۵	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.	۱
۶	باقی مانده تقسیم عدد $20! + 19! + 18! + 17! + 16! + 15! + \dots + 2! + 1!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد)	۱/۵
۷	معادله همنهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.	۱
۸	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می نامیم. ب) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1), \frac{n(n-1)}{2})$ است. ت) گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.	۲
۹	گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) دوری به طول ۴ بنویسید. پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید. ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵



«ادامه سؤالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	---	------

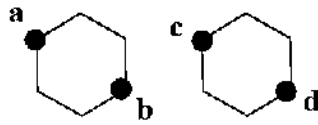
۱۰	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱
		
۱۱	یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۱۲	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشینیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟	۱
۱۳	به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟	۱/۷۵
۱۴	قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه ریزی کنید.	۱/۲۵
۱۵	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟	۱/۵
۱۶	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.	۱/۲۵
۲۰	جمع نمره	"موفق باشید"

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) (صفحه) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)	۱
۲	الف) m^2 (۰/۲۵) ب) نسب به هم اول (۰/۲۵) (ص ۱۳) پ) مینیمال (۰/۲۵) (ص ۴۶) ت) ۲۱ (۰/۲۵) (ص ۳۸)	۱
۳	(ص ۷ و ۸) (۰/۲۵) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow y^2 + 1 \geq -2x(y+x+1)$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$ (۰/۲۵)	۱
۴	(ص ۱۱) (۰/۲۵) $a = \pm 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a \mid 1$ (۰/۲۵) $\rightarrow a \mid 5(6m+5) - 6(5m+4)$ (۰/۲۵) $\rightarrow a \mid 6(5m+4)$ (ص ۱۱/۲۵)	۱/۲۵
۵	می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k+1$ می باشد (۰/۲۵) $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم (ص ۱۶) $\begin{cases} a^2 = 8k+1 \\ b^2 = 8k'+1 \end{cases}$ $(0/25) \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7$ (۰/۲۵)	۱
۶	میدانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و پس داریم (ص ۲۹) $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + \dots + 20! \equiv 3$ (ص ۲۹)	۱/۵
۷	چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد (۰/۲۵) (صفحه ۳۰) $4x \equiv 10 \rightarrow 4x \equiv 4$ (۰/۲۵) $\rightarrow x \equiv 1$ (۰/۲۵) $\rightarrow x = 3k + 1$ (۰/۲۵)	۱
۸	الف) مرتبه (۰/۵) ب) مسیر (۰/۵) پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۰/۵) ت) دور (۰/۵) (ص ۳۵ و ۳۸)	۲
۹	الف) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$ (۰/۵) ب) $cbcedb$ (۰/۲۵) پ) $bced$ یا $bdec$ یا $bdce$ دو مورد هر کدام (۰/۲۵) ت) $N_G(f) = \{g\}$ (ص ۴۱)	۱/۵
۱۰	روش اول می دانیم $\left \frac{n}{\Delta+1} \right \leq \gamma(G)$ پس داریم $\left[\frac{6}{5} \right] \leq \gamma(G)$ بنابراین (۰/۲۵) $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم (۰/۲۵) $\gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد. (۰/۲۵) و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) > 1$ بنابراین (۰/۲۵) $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ (ص ۳۹)	۱

«ادامه در صفحه ۲»

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشوردی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره									
۱۱	<p>رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن (نمره)</p>  <p>a b c d</p> <p>(ص ۵۳)</p> <p>(به شکل های دیگر نیز نمره داده شود). مانند: $\triangle \triangle \triangle \triangle$</p>	۱									
۱۲	<p>(۰/۷۵)</p> <p>$4! \times 2^4 = 384$ (۰/۲۵) (ص ۷۱)</p>	۱									
۱۳	<p>$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_3 = 3 \quad x_4 \geq 3, x_5 \geq 5$ (۰/۵) $\xrightarrow{x_2=3, x_4=y_2+3, x_5=y_5+5}$</p> <p>$x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16$ (۰/۲۵) $x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0$ (۰/۲۵) \rightarrow</p> <p>$\binom{5+4-1}{4-1} = 56$ (۰/۷۵) (ص ۷۱)</p>	۱/۷۵									
۱۴	<p>فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲، ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند.</p> <p>(۰/۲۵) طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (۰/۲۵) (ص ۶۲)</p> <table border="1" data-bbox="183 1097 367 1254"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <p>(۰/۷۵)</p>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱/۲۵
۱	۲	۳									
۳	۱	۲									
۲	۳	۱									
۱۵	<p>$\overline{A \cup B} = s - A \cup B = s - A - B + A \cap B$ (۰/۲۵)</p> <p>$s = 630$ (۰/۲۵), $A = 210$ (۰/۲۵), $B = 126$ (۰/۲۵), $A \cap B = 42$ (۰/۲۵) (ص ۸۳)</p> <p>$\Rightarrow \overline{A \cup B} = 336$ (۰/۲۵)</p>	۱/۵									
۱۶	<p>ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است</p> <p>(۰/۲۵) با توجه به قضیه فیثاغورس داریم:</p> <p>$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow AB^2 < 8$ (۰/۲۵) $\Rightarrow AB < \sqrt{8}$ (۰/۲۵)</p> <p>(ص ۸۴)</p>	۱/۲۵									
۲۰	جمع نمره										

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»