308F

کد کنترل
308
F

آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری ــ سال ۱۴۰۱

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

دفترچهٔ شمارهٔ (۱)
صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشتهٔ مهندسی مکانیک ــ دینامیک، کنترل و ارتعاشات (کد ۲۳۲۳)

جدول مواد امتحانی، تعداد، شمارهٔ سؤال‌ها و زمان پاسخ‌گویی

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ	زمان پاسخ‌گویی
مجموعه دروس تخصصی: ــ ریاضیات مهندسی ــ دینامیک پیشرفته ــ ارتعاشات پیشرفته ــ کنترل پیشرفته	۴۵	۱	۴۵	۱۵۰ دقیقه

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزلهٔ غیبت و حضور نداشتن در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- اگر $f(z)=\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}$، آنگاه بسط لوران f در حوزه $|z|>۲$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n-۱}{z^{n+۱}}$

۲) $\sum_{n=۰}^{\infty}(۱-\frac{۱}{۲^{n+۱}})\frac{۱}{z^n}$

۳) $\sum_{n=۰}^{\infty}(۱+\frac{۱}{۲^{n+۱}})\frac{۱}{z^{n+۱}}$

۴) $-\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^n}{۲^{n+۱}}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{z^n}\right)$

۲- کدام تبدیل $w=u+iv$، دایره‌ای به معادله $x^۲+y^۲+۶\frac{۱+r^۲}{۱-r^۲}x+۹=۰$، را روی دایره‌ای به معادله $u^۲+v^۲=r^۲$، می‌نگارد؟

۱) $w=\frac{z-۳}{z+۳}$

۲) $w=\frac{z+۳}{z-۳}$

۳) $w=۲\frac{z-۳}{z+۳}$

۴) $w=۲\frac{z+۳}{z-۲}$

۳- تابع $u(x,y)=۳xy^۲-x^۳$، بخش حقیقی تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ است. مقدار $f'(i)$ و $f''(i)$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

۱) -۳ و $-۶i$

۲) -۳ و $۶i$

۳) ۳ و $-۶i$

۴) ۳ و $۶i$

۴- اگر $u(x,t)$ جواب معادلهٔ $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \le x \le \pi, t \ge 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \\ u(x,0) = \sin x + \sin 3x & 0 < x < \pi \end{cases}$ باشد، مقدار $u(\frac{\pi}{2},1)$، کدام است؟

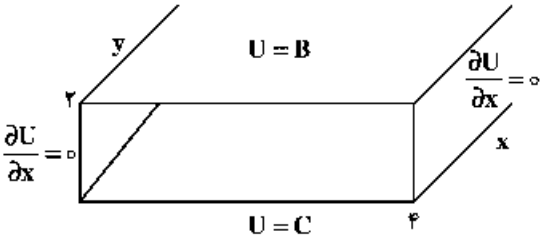
۱) $\frac{e^4+1}{e^3}$

۲) $\frac{e^2-1}{e^3}$

۳) $\frac{e^{10}+1}{e^9}$

۴) $\frac{e^8-1}{e^9}$

۵- پاسخ معادلهٔ لاپلاس در داخل تونل شکل زیر، برای $B = \begin{cases} V_0 & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 4 \end{cases}$ و $C = 0$، کدام است؟



۱) $U(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{m\pi \sin h(\frac{4m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sin h(\frac{m\pi}{4}y)$

۲) $U(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{m\pi \sin h(\frac{m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sin h(\frac{m\pi}{4}y)$

۳) $U(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{2m\pi \sin h(\frac{m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sin h(\frac{m\pi}{4}y)$

۴) $U(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{4m\pi \sin h(\frac{m\pi}{2})} \sin(\frac{m\pi}{4}x) \sin h(\frac{m\pi}{4}y)$

۶- با استفاده از قضیه مانده‌ها حاصل انتگرال $\oint_{z=1} z^m e^{\frac{1}{z}}\,dz$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi i}{(m+1)!}$

۲) $\frac{2\pi i}{m!}$

۳) $\frac{2\pi i}{(m+1)!}$

۴) $\frac{\pi i}{1m!}$

۷- حاصل انتگرال کوشی $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2e}(\sin 1-\cos 1)$

۲) $\frac{\pi}{2e}(\cos 1+\sin 1)$

۳) $\frac{\pi}{e}(\sin 1-\cos 1)$

۴) $\frac{\pi}{e}(\sin 1+\cos 1)$

۸- حاصل عبارت $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z+z^2+z^3}$، کدام است؟

۱) $-\pi i$

۲) $-\frac{\pi}{2}i$

۳) صفر

۴) πi

۹- اگر بسط فوریه تابع $f(x)=\sin \alpha x$ برای $-\pi<x<\pi$ که α عدد غیرصحیح است، به‌صورت $f(x)=\frac{2\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}\sin(nx)$، باشد، در این صورت حاصل دنبالهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(16n^2-1)^2}$، با استفاده از قضیه پارسوال کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2-2\pi}{512}$

۲) $\frac{\pi^2+2\pi}{256}$

۳) $\frac{\pi^2-2\pi}{128}$

۴) $\frac{\pi^2-\pi}{512}$

۱۰- فرض کنیم $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = (2\sin x - 3\cos x)^2$، روی بازه $[-\pi, \pi]$ باشد، در این صورت، مقدار $a_0 \times b_2$، کدام است؟

۱) -15

۲) -27

۳) -36

۴) -39

۱۱- اگر $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx}$، باشد، حاصل عبارت $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^4 + 64} d\omega$، کدام است؟

(راهنمایی: $\sin \alpha x = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})$)

۱) $\frac{\pi}{16} e^{-2x} \sin 2x$

۲) $\frac{\pi}{16} e^{-2x} \cos 2x$

۳) $\frac{\pi}{4} e^{-x} \sin x$

۴) $\frac{\pi}{4} e^{-x} \cos x$

۱۲- فرض کنید ln شاخه اصلی لگاریتم است. در این صورت حاصل انتگرال $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(z)}{(z+i)^3} dz$، کدام است؟

۱) $-\pi$

۲) πi

۳) -2π

۴) $2\pi i$

۱۳- اگر ناحیه $|z| = 2$ را تحت رابطه $w = z + \frac{2}{z}$، نگاشت کنیم، مساحت ناحیه نگاشت شده چقدر است؟

۱) 2π

۲) 3π

۳) 4π

۴) 6π

۱۴- اگر برای $0 < x < 2$ داشته باشیم: $x = \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots)$، در این صورت ضریب جمله $\cos \pi x$، در بسط عبارت $x - x^2$، کدام است؟

۱) $\frac{16}{\pi^2}$

۲) $\frac{8}{\pi^2}$

۳) $\frac{4}{\pi^2}$

۴) $\frac{2}{\pi^2}$

۱۵- جواب معادله دیفرانسیل مشتقات نسبی $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} \\ U(0,t) = U(\pi,t) = U(x,0) = 0 \\ U_t(x,0) = k\sin 3x - \frac{k}{2}\sin 6x \end{cases}$، کدام است؟

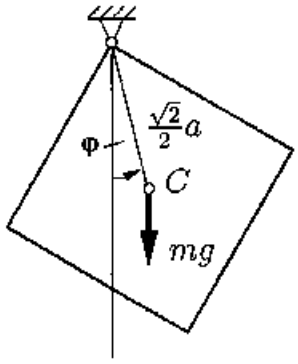
۱) $U(x,t) = \frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x - \frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$

۲) $U(x,t) = \frac{k}{4}\sin 4t\sin 3x - \frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$

۳) $U(x,t) = \frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x - \frac{k}{4}\sin 2t\sin 6x$

۴) $U(x,t) = \frac{k}{9}\sin 9t\sin 3x - \frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$

۱۶- مربع شکل زیر که در صفحه قائم آویزان شده درصورتی‌که طول هر ضلع مربع a باشد و ممان اینرسی مربع حول محور عمود بر آن در مرکز مربع $\frac{1}{6}ma^2$ باشد، مقدار شتاب زاویه‌ای مربع بر حسب زاویهٔ φ کدام است؟



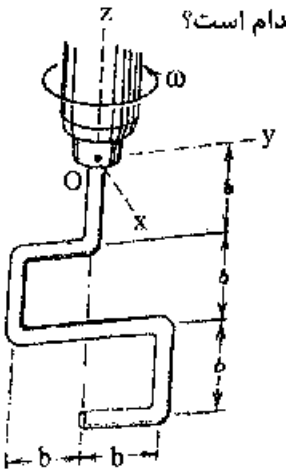
۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{g}{a}\sin\varphi$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{g}{a}\sin\varphi$

۳) $3\sqrt{2}\frac{g}{a}\sin\varphi$

۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{g}{a}\sin\varphi$

۱۷- همزن نشان داده شده از میله‌ای به طول $7b$ و جرم بر واحد طول ρ ساخته شده است. این همزن با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور z می چرخد. مقدار گشتاور خمشی میله در پایه O سه نظام کدام است؟



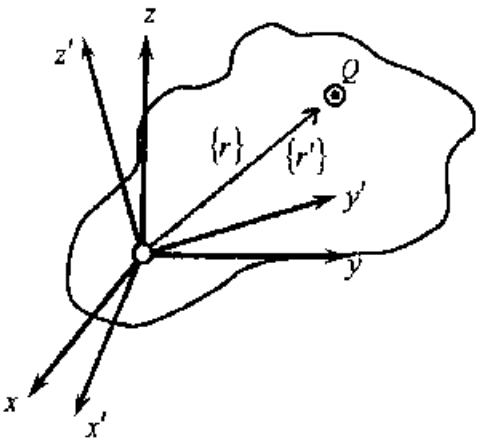
۱) $\rho b^4 \frac{\omega^2}{2}$

۲) $\rho b^3 \omega^2$

۳) $2\rho b^3 \omega^2$

۴) $3\rho b^3 \omega^2$

۱۸- اگر ماتریس ممان اینرسی یک جسم در دستگاه مختصات xyz را با نماد $[I]$ و ماتریس ممان اینرسی همین جسم در دستگاه مختصات دوران‌یافته $x'y'z'$ با نماد $[I']$ نمایش دهیم، آنگاه چه ارتباطی میان این دو ماتریس ممان اینرسی وجود دارد؟ (توجه: موقعیت ذره ماده Q از منظر دستگاه xyz با برداری موقعیت $\{r\}$ و موقعیت همین ذره از دیدگاه دستگاه $x'y'z'$ با بردار $\{r'\}$ توصیف می‌گردد. با استفاده از ماتریس کسینوس‌های هادی $[C]$ و یا ماتریس دوران $[R]$، این دو بردار موقعیت از منظر دستگاه‌های xyz و $x'y'z'$، به طریق $\{r'\}=[C]^T\{r\}$ و یا $\{r'\}=[R]\{r\}$ به هم ارتباط می‌یابند.)



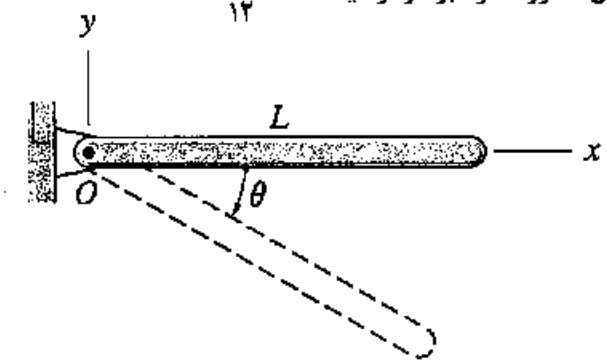
۱) $[I']=[R][I][R]^T$

۲) $[I]=[R][I'][R]^T$

۳) $[I]=[C]^T[I'][C]$

۴) $[I']=[C][I][C]^T$

۱۹- میلهٔ یکنواختی مطابق شکل از وضعیت افقی از حالت سکون رها می‌شود. مؤلفه نیروی عکس‌العمل O عمود بر میله برحسب زاویهٔ θ کدام است؟ (ممان اینرسی میله حول محور عمود بر مرکز میله $\frac{1}{12}mL^2$ است.)



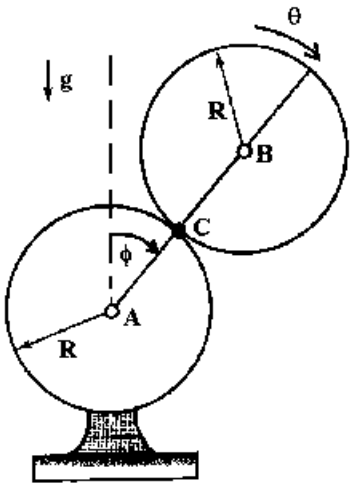
۱) $\frac{mg}{4}\sin\theta$

۲) $\frac{mg}{4}\cos\theta$

۳) $\frac{2mg}{3}\sin\theta$

۴) $\frac{3mg}{4}\cos\theta$

۲۰- کره یکنواخت توپری به جرم **m** و شعاع **R** بر روی کره ثابتی با همان شعاع شروع به جرکت می‌کند. با فرض حرکت غلتشی، کدام گزینه درست است؟



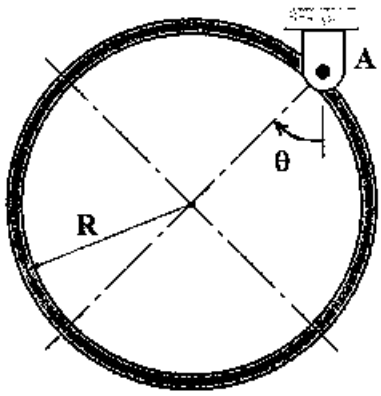
۱) $T=\frac{1}{2}\bar{I}_C\dot{\phi}^2$

۲) $T=\frac{1}{2}\bar{I}_B\dot{\theta}^2$

۳) $T=\frac{1}{2}I_B\dot{\phi}^2$

۴) $T=2I_C\dot{\phi}^2$

۲۱- حلقهٔ یکنواختی مطابق شکل از لولای **A** آویزان شده است. درصورتی‌که ممان اینرسی حلقه حول محور عمود بر مرکز آن mR^2 باشد، شتاب زاویه‌ای حلقه برحسب θ کدام است؟



۱) $-\frac{g}{2R}\cos\theta$

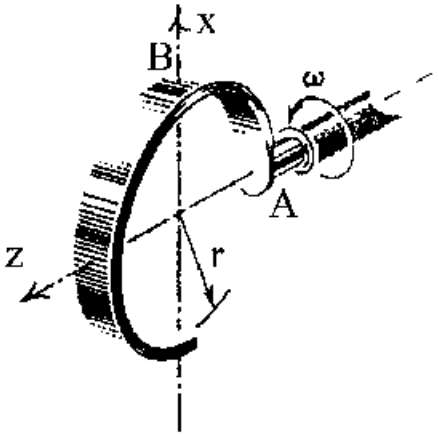
۲) $-\frac{g}{R}\sin\theta$

۳) $-\frac{g}{2R}\sin\theta$

۴) $-\frac{g}{R}\cos\theta$

۲۲- حلقه ناقص نشان داده شده در شکل دارای جرم بر واحد طول ρ بوده و در نقطهٔ **A** به محور جوش شده است. گشتاور خمشی **M** در نقطهٔ **A** از حلقه بر اثر دوران آن با سرعت زاویه‌ای ثابت ω ، در کدام گزینه درست است؟

$\left(I_{xz}=-\frac{\rho r^3}{2}\right)$



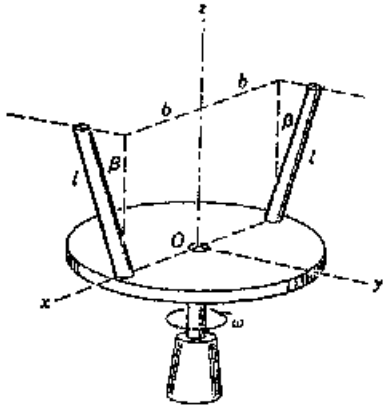
۱) $\rho r^3\omega^2$

۲) $\frac{1}{4}\rho r^3\omega^2$

۳) $\frac{1}{3}\rho r^3\omega^2$

۴) $\frac{1}{2}\rho r^3\omega^2$

۲۳- هر یک از میله‌های باریک به طول l و جرم m به دیسک مدوری که حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، جوش شده است. هر یک از میله‌ها با امتداد قائم زاویه β ساخته و صفحهٔ این زاویه موازی صفحه yz است. عبارت $\vec{H}_o$ مومنتم زاویه‌ای دو میله حول مبدأ مختصات O کدام است؟



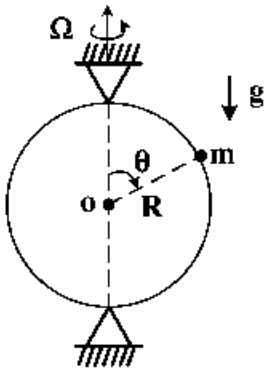
۱) $۲m\left(\frac{۱}{۳}l^۲\sin^۲\beta+b^۲\right)\omega\vec{K}$

۲) $m\left(l^۲\sin^۲\beta+b^۲\right)\omega\vec{K}$

۳) $۲m\left(\frac{۱}{۳}l^۲\sin^۲\beta+۲b^۲\right)\omega\vec{K}$

۴) $۲m\left(l^۲\sin^۲\beta+b^۲\right)\omega\dot{K}$

۲۴- لغزنده‌ای به جرم m می‌تواند بدون اصطکاک بر روی حلقهٔ دایره‌ای به شعاع R حرکت کند. حلقه دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد دوران می‌کند. اندازه حرکت تعمیم‌یافته متناظر با مختصات تعمیم‌یافته θ کدام است؟



۱) $mR^۲\Omega^۲\cos\theta$

۲) $mR^۲\dot{\theta}$

۳) $mR^۲\Omega^۲\sin\theta$

۴) $mR^۲\Omega^۲\sin\theta\cos\theta+mgR\sin\theta$

۲۵- معادله قیدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=۱}^{n}A_i\dot{x}_i+B=۰ \quad و \quad i=۱,۲,۳,\ldots,n$$

در چه شرایطی قیود هولونومیک خواهند بود؟

۱) $A_i=\frac{\partial^۲f}{\partial x\partial t}$, $B=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

۲) $A_i=\frac{\partial f}{\partial t}$, $B=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

۳) $A_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $B=\frac{\partial f}{\partial t}$

۴) $A_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $B=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

۲۶- معادلهٔ ارتعاشی یک سیستم دو درجه‌آزادی استهلاکی به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\ddot{\underline{x}} + \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\dot{\underline{x}} + \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\underline{x} = \underline{۰}$$

فرکانس‌های طبیعی این سیستم تقریباً برابرند با $\omega_۱ = ۰/۴۵\frac{rad}{s}$ و $\omega_۲ = ۱/۹۵\frac{rad}{s}$، نسبت‌های استهلاک (میرایی) در مودهای اول و دوم کدام است؟

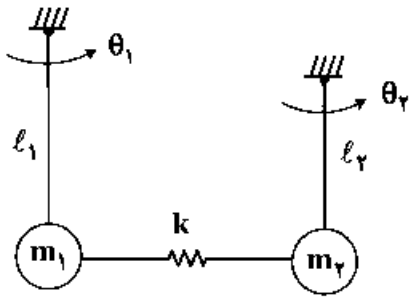
۱) $\zeta_۱ = ۰/۳۳$, $\zeta_۲ = ۰/۸۷$

۲) $\zeta_۱ = ۰/۵۴$, $\zeta_۲ = ۰/۸۳$

۳) $\zeta_۱ = ۰/۷۸$, $\zeta_۲ = ۱/۱$

۴) $\zeta_۱ = ۰/۷۲$, $\zeta_۲ = ۱/۵۳$

۲۷- یکی از دو فرکانس طبیعی سیستم زیر با ω نشان داده می‌شود، نسبت دامنهٔ $\frac{\theta_۲}{\theta_۱}$، مرتبط با آن کدام است؟



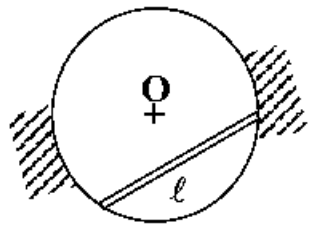
۱) $\frac{-\omega^۲ m_۲ \ell_۲^۲ + m_۲ g \ell_۲ + k\ell_۲^۲}{k\ell_۱\ell_۲}$

۲) $\frac{-\omega^۲ m_۱ \ell_۱^۲ + m_۱ g \ell_۱ + k\ell_۱^۲}{k\ell_۱\ell_۲}$

۳) $\frac{-\omega^۲ m_۱ \ell_۱^۲ + k\ell_۱^۲}{k\ell_۱\ell_۲}$

۴) $\frac{-\omega^۲ m_۲ \ell_۲^۲ + k\ell_۲^۲}{k\ell_۱\ell_۲}$

۲۸- میلهٔ همگن به طول $\ell = \frac{۳R}{۲}$ و جرم m داخل استوانه‌ای به شعاع R بدون اصطکاک نوسان می‌کند. فرکانس طبیعی آن کدام است؟ ($I = \frac{m\ell^۲}{۱۲}$ میله)



۱) $\frac{۲\sqrt{۷g}}{۵R}$

۲) $\frac{۲g}{۳R}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۷g}}{۷R}$

۴) $\frac{۴g\sqrt{۷}}{۳R}$

۲۹- جرم $m = ۱kg$ به فنری مطابق شکل با سختی $۱۰۰\frac{N}{m}$ متصل است و بر روی سطحی با ضریب اصطکاک ۰/۱ قرار گرفته است. انتهای راست فنر (نقطه A) با سرعت ثابت $V_۰ = ۲\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می‌کند. در صورتی‌که سیستم در لحظه $t = ۰$ در حال سکون باشد، ضابطهٔ حرکت جرم کدام است؟

$m = ۱kg$

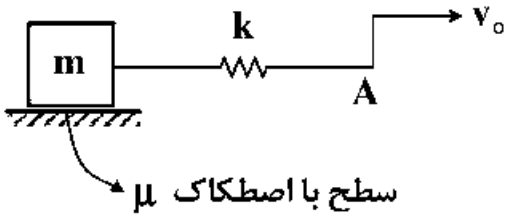
$k = ۱۰۰\frac{N}{m}$

$V_۰ = ۲\frac{m}{s}$

$\mu = ۰/۱$

$x(۰) = \dot{x}(۰) = ۰$

$g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$



۱) $x(t) = ۰/۰۱(\cos ۱۰۰t - ۱) + ۲(t - ۰/۱\sin ۱۰۰t)$

۲) $x(t) = ۰/۰۱(\cos ۱۰t - ۱) + ۲(t - ۰/۱\sin ۱۰t)$

۳) $x(t) = ۰/۱(\cos ۱۰t - ۱) + ۲(t - ۰/۰۱\sin ۱۰t)$

۴) $x(t) = ۰/۰۱(۱ - \cos ۱۰t) + ۲(t - ۰/۱\sin ۱۰t)$

۳۰- برای اندازه‌گیری فرکانس طبیعی اول ارتعاشات عرضی یک تیر، نوسانگری به جرم $۱kg$ به انتهای آن نصب و فرکانس $۱۰۰ Hz$ به‌دست آمده است. با اضافه کردن یک جرم $۱kg$ دیگر در همان محل، فرکانس طبیعی مجموعه به $۹۵ Hz$ کاهش یافته است. فرکانس طبیعی اول مجموعه اصلی تقریباً چند هرتز است؟

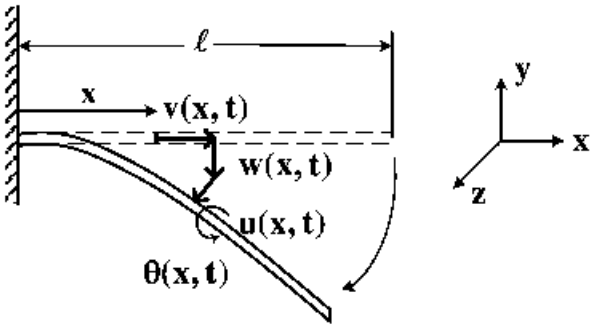
۱) ۹۱

۲) ۹۷/۵

۳) ۱۰۶

۴) ۱۱۱

۳۱- انرژی کرنشی الاستیک خطی در اثر خمش، پیچش و حرکت محوری طبق شکل برای تیری که هندسه و جنس در امتداد محور یکنواخت است، کدام است؟



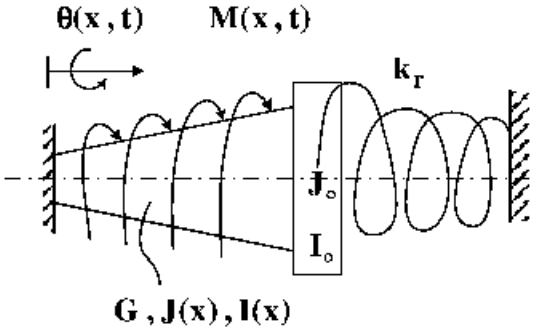
۱) $\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{1}{2}EA\int_{0}^{\ell}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{1}{2}GJ\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^{2}dx$

۲) $\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}dx+\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}dx+\frac{1}{2}EA\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}GJ\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^{2}dx$

۳) $\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{1}{2}EA\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}GJ\int_{0}^{\ell}\frac{\partial\theta}{\partial x}dx$

۴) $\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}EI\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}EA\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}GJ\int_{0}^{\ell}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^{2}dx$

۳۲- معادلهٔ حرکت برای ارتعاشات پیچشی شفت نشان داده شده در شکل زیر، کدام است؟



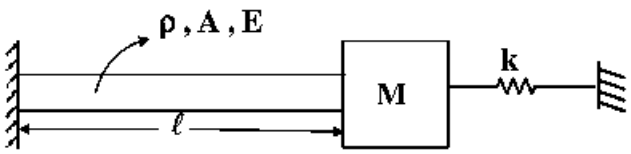
۱) $\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)+M(x,t)=I(x)\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}$

۲) $GJ\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}+M(x,t)=I_{0}\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}$

۳) $\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)+M(x,t)=I(x)\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}+I_{0}\frac{\partial^{2}\theta(\ell,t)}{\partial t^{2}}$

۴) $\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)+M(x,t)=I(x)\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}}+I_{0}\frac{\partial^{2}\theta(\ell,t)}{\partial t^{2}}+k_{T}\theta(\ell,t)$

۳۳- میلهٔ شکل زیر را که تحت ارتعاشات طولی است در نظر بگیرید. انتهای آن به یک جرم M و سختی k متصل است. اگر چگالی، سطح مقطع و مدول الاستیسیته میله به‌ترتیب ρ، A و E باشند، معادلهٔ فرکانسی سیستم کدام است؟ $\left(C=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)$



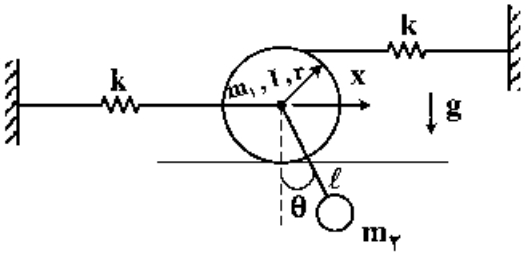
۱) $\tan\frac{\omega\ell}{C}=\frac{(M\omega^2-k)C^2}{AE\omega C}$

۲) $\tan\frac{\omega\ell}{C}=\frac{(M\omega^2-kC^2)}{AE\omega C}$

۳) $\tan\frac{\omega\ell}{C}=\frac{AE\omega C}{M\omega^2-kC^2}$

۴) $\tan\frac{\omega\ell}{C}=\frac{AE\omega C}{(M\omega^2-k)C^2}$

۳۴- معادلات حرکت سیستم زیر در صورتی‌که جرکت چرخ بر روی زمین غلتش کامل و زاویه θ کوچک باشد و از ترم‌های غیرخطی صرف‌نظر شود، کدام است؟ (I ممان اینرسی چرخ حول محور هندسی آن است.)



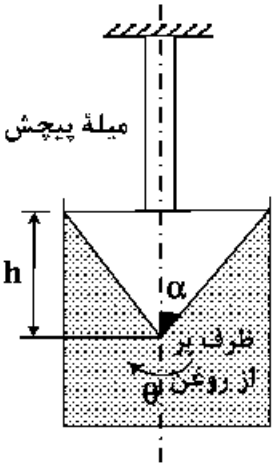
۱) $\begin{cases}\left(m_1+m_2+\frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}+m_2\ell\ddot{\theta}+5kx=0\\ m_2\ell\left(\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}\right)+m_2g\ell\theta=0\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}+m_2\ell\ddot{\theta}+3kx=0\\ m_2\ell\left(\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}\right)+m_2g\ell\theta=0\end{cases}$

۳) $\begin{cases}m_1\ddot{x}+m_2\ell\ddot{\theta}+5kx=0\\ m_2\ell^2\ddot{\theta}+m_2g\ell\theta=0\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\left(m_1+m_2+\frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}+m_2\ell\ddot{\theta}+4kx=0\\ m_2\ell\left(2\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}\right)+2m_2g\ell\theta=0\end{cases}$

۳۵- یک مخروط به انتهای میلهٔ پیچش طبق شکل متصل شده و کل سطح جانبی آن در روغن با ویسکوزیتهٔ μ قرار دارد. گشتاور استهلاکی وارد بر مخروط از طرف روغن کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}\pi\mu\frac{\tan^2\alpha}{\cos\alpha}h^3\dot{\theta}$

۲) $\frac{2}{3}\pi\mu\frac{\tan^2\alpha}{\cos\alpha}h^3\dot{\theta}$

۳) $\frac{1}{3}\pi\mu\frac{\tan^2\alpha}{\sin\alpha}h^3\dot{\theta}$

۴) $\frac{2}{3}\pi\mu\frac{\tan^2\alpha}{\sin\alpha}h^3\dot{\theta}$

۳۶- سیستم زیر را در نظر بگیرید. اگر پاسخ سیستم با شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، به ورودی پله واحد به‌صورت $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$ باشد، کدام عبارت در مورد این سیستم درست است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + Bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

۱) سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر است.

۲) سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر نیست.

۳) سیستم مشاهده‌پذیر است ولی کنترل‌پذیر نیست.

۴) سیستم مشاهده‌پذیر است ولی در مورد کنترل‌پذیری آن نمی‌توان اظهارنظر نمود.

۳۷- سیستم با معادلات حالت $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ را در نظر بگیرید که در آن x بردار حالت، u ورودی و y خروجی است. $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$

کدام‌یک از گزینه‌های داده شده، بهترین انتخاب برای حالت اولیه x_0 است تا پاسخ حالت بدون ورودی سیستم $(u = 0)$ سریع‌ترین رفتار را داشته باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

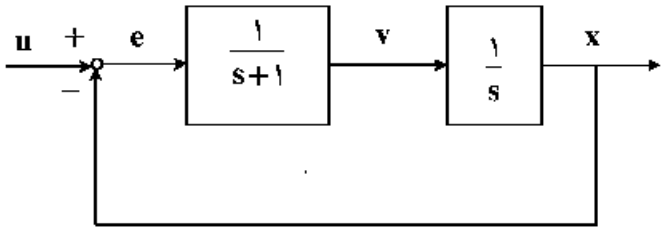
۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

۳۸- در سیستم اصلی نشان داده‌شده در شکل برای اندازه‌گیری سرعت v از یک مشاهده‌گر رسته کامل استفاده می‌شود. درصورتی‌که قطب‌های مشاهده‌گر در $s_{1,2} = -2, -3$ قرار داشته باشد، با در نظرگرفتن معادلات داده شده، بهره مشاهده‌گر L کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\dot{z} = Az + bu \,, y = c^T z \qquad z = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$
$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + bu + L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = c\,\hat{z} \qquad L = ?$$



۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳۹- با توجه به نمایش فضای حالت سیستم زیر، با ورودی صفر و به‌ازای شرایط اولیه $x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ کدام گزینه درست است؟

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

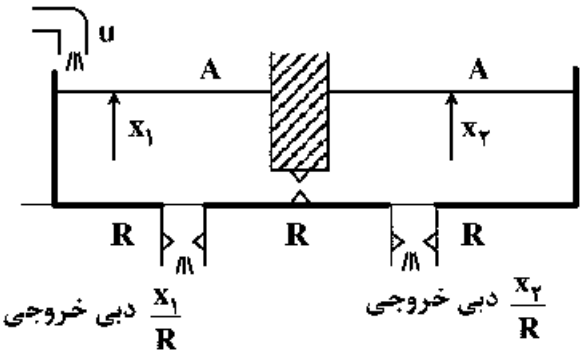
۱) $3x_1(t)-x_2(t)=1$

۲) $-3x_1(t)+x_2(t)=1$

۳) $3x_1(t)+x_2(t)=1$

۴) $-3x_1(t)-x_2(t)=1$

۴۰- در سیستم خطی مقابل با ورودی u (دبی به منبع ۱) ارتفاع‌ها x_1 و x_2 سطح مقطع ظرف‌ها $A=1$ و مقاومت شیرهای خروجی و مقاومت شیر بین دو ظرف $R=1$ است. با فرض آنکه خروجی سیستم دبی جابه‌جایی بین دو ظرف یعنی $y=\frac{x_1-x_2}{R}$ باشد، تابع تبدیل بین ورودی u و خروجی y کدام است؟



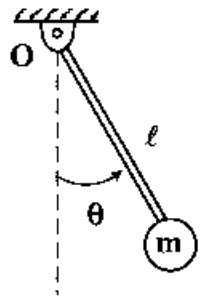
۱) $\frac{1}{s+3}$

۲) $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$

۳) $\frac{1}{s+1}$

۴) $\frac{1}{(s+2)^2}$

۴۱- آونگ ساده مقابل شامل میله صلب بدون جرم به طول ℓ، جرم متمرکز m در انتهای میله، حول لولای بدون اصطکاک O نوسان می‌کند. معادله حرکت به‌صورت $\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$ است، که در آن $\omega^2=\frac{g}{\ell}$ است. با فرض $x_1=\theta$ و $x_2=\dot{\theta}$ معادلات حالت سیستم خطی‌شده حول نقطه تعادل $\begin{cases}x_1=\theta=\pi\\ x_2=\dot{\theta}=0\end{cases}$ به‌صورت $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \dot{x}=Ax$ در می‌آید. ماتریس A کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & -1\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & 0\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -1\end{bmatrix}$

۴۲- سیستم رسته ۴ با معادلات حالت زیر داده‌شده که درآن A ماتریس مربع ۴×۴، B ماتریس ستونی و C ماتریس سطری است.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

تابع تبدیل این سیستم چنین است:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1.5}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+6)}$$

کدام گزینه در مورد کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری آن درست است؟

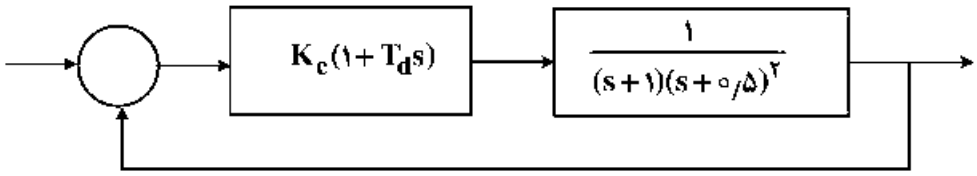
۱) کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر است.

۲) ممکن است کنترل‌پذیر یا مشاهده‌پذیر نباشد.

۳) ممکن است مشاهده‌پذیر نباشد ولی کنترل‌پذیر است.

۴) ممکن است کنترل‌پذیر نباشد ولی مشاهده‌پذیر است.

۴۳- در سیستم مقابل پارامتر T_d در کنترل‌کننده در چه محدوده‌ای باشد که سیستم مداربسته به ازای همه مقادیر مثبت K_c همواره پایدار باشد؟



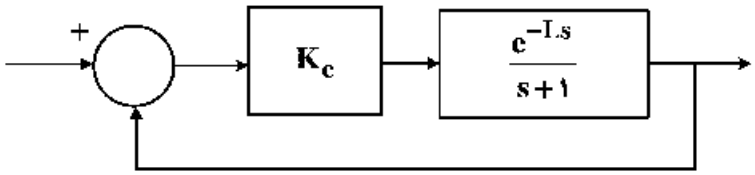
۱) $T_d > 0$

۲) $0 < T_d < 5$

۳) $0 < T_d < 2$

۴) $T_d > 0.5$

۴۴- در سیستم مقابل با فرض $K_c = 2$ زمان تأخیر L در سیستم را طوری تعیین کنید، که حد فاز (Phase margin) مساوی 30° شود؟



۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

۳) $\frac{2\pi}{3}$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

۴۵- در سیستم خطی $\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0\end{cases}$ که در آن A ماتریس مربع $n \times n$ است فرض کنید داریم $A = A_1 + A_2$ که A_1 و A_2 نیز ماتریس‌های مربع $n \times n$ هستند. در چه صورتی رابطه $e^{At} = e^{A_1 t}.e^{A_2 t}$، همواره درست است؟

۱) فقط وقتی درست است که A_1 و A_2 ماتریس قطری باشند.

۲) فقط وقتی درست است که مقادیر ویژه A حقیقی باشند.

۳) فقط وقتی درست است که $A_1 A_2 = A_2 A_1$ باشد.

۴) در همه حالت‌ها درست است.